11. Зобразити графічно задачу пошуку умовного екстремуму і знайти рішення:

а)

$$I(u_1,u_2)=(u_1-2)^2+(u_2-2)^2\to\min_{u_1,u_2}$$

$$u_1-u_2=0;$$

$$u_1\ge 3; u_2\ge 3.$$

б)

$$I(u_1,u_2)=(u_1-2)^2+2(u_2-1)^2\to\min_{u_1,u_2}$$

$$u_1-2u_2=0;$$

$$u_1\ge 2; u_2\ge 1.$$

в)

$$I(u_1,u_2)=(u_1-3)^2+2u_2^2\to\min_{u_1,u_2}$$

$$u_1-2u_2=0;$$

$$u_1\ge 4; u_2\ge 1.$$

2. Методи класичного аналізу для розв’язку задач умовної оптимізації

Як уже говорилося вище, розв’язок задачі оптимізації полягає у знаходженні екстремуму цільової функції в області допустимих рішень.

Існують методи класичного аналізу для пошуку екстремуму як у задачах безумовної, так і умовної оптимізації.

Для розв’язку задачі безумовної оптимізації необхідно розв’язати систему рівнянь (1.58) і в кожній зі знайдених точок перевірити виконання умови негативної або позитивної визначеності матриці Гессе (1.59) та визначити цільову функцію.

Для розв’язку задач умовної оптимізації при наявності обмежень типу рівностей застосовуються методи, засновані на зведенні задач умовної оптимізації до задач безумовної оптимізації.

2.1. Метод виключення

Припустимо, що функції, які визначають обмеження типу рівнянь $f_j(\vec{u}) = 0,\ j = 1,...,m_1$ мають в околиці розглянутої точки неперервні частинні похідні до другого порядку по всіх аргументах $j = 1,...,m_1$, де $m_1 < n$. Тоді, якщо складений із частинних похідних по перших m_1 аргументах, визначник (якобіан) відмінний від нуля

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(\vec{u})}{\partial u_1} \cdots \dfrac{\partial f_1(\vec{u})}{\partial u_{m1}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_{m1}(\vec{u})}{\partial u_1} \cdots \dfrac{\partial f_{m1}(\vec{u})}{\partial u_{m1}} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.1}$$

то система рівнянь $f_j(\vec{u}) = 0$ має розв’язки відносно $u_1,...,u_{m1}$ і може бути сформульована наступним чином:

$$u_j = g_j(u_{m+1},...,u_m),\ j = 1,2,...,m_1 \tag{2.2}$$

Підставляючи останні вирази у вираз для цільової функції, отримаємо задачу пошуку безумовного екстремуму функції $m - m_1$ змінних.

Провести виключення частини компонент вектора $\vec{u}$ буває важко, тому може бути використаний інший метод.

2.2. Метод множників Лагранжа.

Метод множників Лагранжа містить наступні етапи:

1) складається функція $m + m_1$ змінних, яка називається *функцією Лагранжа*:

$$L(\vec{u},\vec{\lambda}) = f_0(\vec{u}) + \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_j f_j(\vec{u}), \tag{2.3}$$

де числа λ_j називаються *множниками Лагранжа*.

2) обчислюються і прирівнюються до нуля її частинні похідні по u_i й λ_j:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\vec{u},\vec{\lambda})}{\partial u_i} = \dfrac{\partial f_0(\vec{u})}{\partial u_i} + \sum\limits_{j=1}^{m_1} \lambda_j \cdot \dfrac{\partial f_j(\vec{u})}{\partial u_i} = 0,\ i = 1,...,m \\ \dfrac{\partial L(\vec{u},\vec{\lambda})}{\partial \lambda_i} = f_j(\vec{u}) = 0,\ j = 1,...,m_1 \end{cases} \tag{2.4}$$

3) вирішується система (2.4) $m+m_1$ рівнянь щодо $m+m_1$ невідомих $u_1, u_2, ..., u_m, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{m1}$.

Система рівнянь (2.4) є необхідними умовами екстремуму в задачі умовної оптимізації з обмеженнями типу рівнянь. Як і для задач безумовної оптимізації, необхідні умови не визначають характер стаціонарної точки.

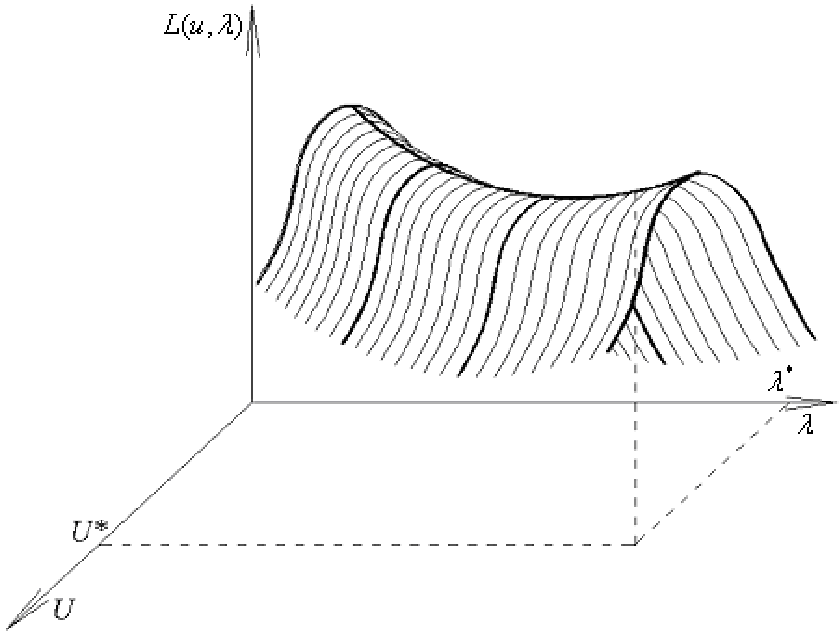

Рис. 2.1. *Функція Лагранжа*

Можна показати, що екстремум задачі умовної оптимізації з обмеженнями типу рівнянь, досягається при $\vec{u}$ і $\vec{\lambda}$, що відповідають сідловій точці функції Лагранжа (рис. 2.1). Це дозволяє знайти розв’язок задачі методами математичного програмування в тому випадку, коли аналітично розв’язати систему (2.4) важко.

Приклад 2.1. Оптимальне проектування.

Необхідно спроектувати на бетонному фундаменті циліндричний покритий зверху склад, у якому при заданому об'ємі V зовнішня поверхня F повинна бути мінімальною. Діаметр складу позначимо буквою d, а висоту - буквою h.

Математично задача формулюється в такий спосіб:

$$F(d,h) = \frac{\pi d^2}{4} + \pi dh \to \min, \tag{2.5}$$

при обмеженні:

$$\frac{\pi d^2}{4} h = V \tag{2.6}$$

Функція Лагранжа буде сформульована в наступному вигляді:

$$L(d,h,\lambda) = \frac{\pi d^2}{4} + \pi dh + \lambda(V - \frac{\pi d^2}{4} h) \tag{2.7}$$

З необхідних умов оптимальності:

$$\frac{\partial L}{\partial d} = \frac{\pi d}{2} + \pi h - \lambda \frac{\pi d}{2} = 0, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial h} = \pi d - \lambda \frac{\pi d^2}{4} = 0, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = V - \frac{\pi d^2}{4} h = 0, \tag{2.10}$$

отримують розв’язок:

$$d^* = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},\ h^* = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},\ \lambda^* = \frac{4}{d^*} \tag{2.11}$$

Мінімальна поверхня становить:

$$F_{\min} = 3 \cdot \sqrt[3]{\pi V^2} \tag{2.12}$$

Приклад 2.2. Оптимальний розподіл ресурсів.

Проблема розподілу ресурсів між декількома паралельно працюючими технологічними лініями має велике практичне значення.

Розглянемо типову постановку задачі.

Дано технологічну систему, що складається з паралельних процесів *m*, у яких сировина *S* переробляється в кінцевий продукт P. (рис. 2.2) Залежність виробництва кількості продукту P_i при обробці сировини в кількості S_i для кожного процесу позначається за допомогою індивідуальної характеристики $P_i(S_i)$. Обмежимо загальну кількість сировини S, що обробляється, заданим значенням S_V.

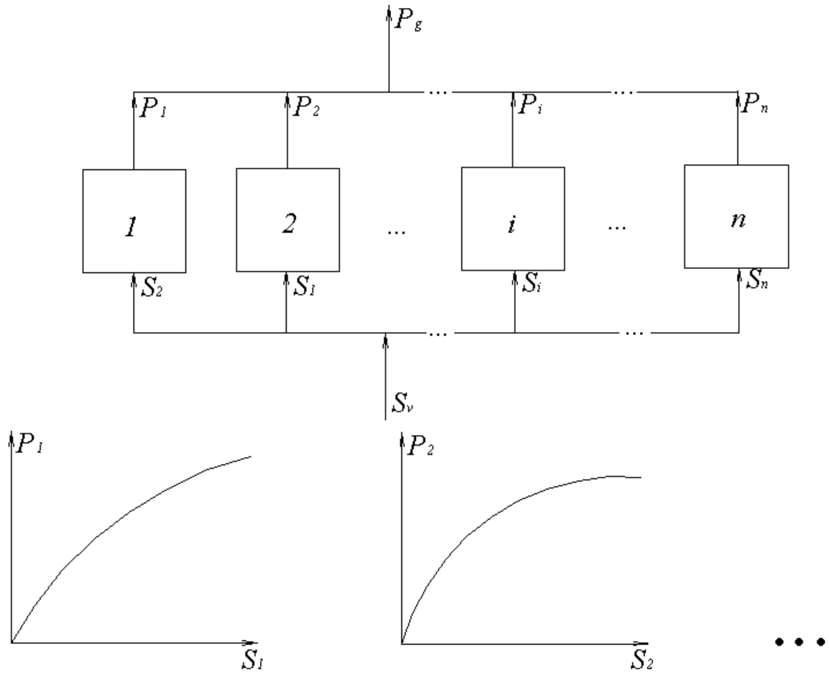

Рис. 2.2. *До задачі оптимального розподілу ресурсів*

Необхідно знайти таке керування системою (тобто такий розподіл обмежених ресурсів *S* на всі етапи виробничого процесу), при якому загальне виробництво *P* було б максимальним:

$$I = \sum_{i=1}^{m} P_i(S_i) \to \max \tag{2.13}$$

Очевидно, що:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = S_V,\ S_i \geq 0,\ i = 1,2,...,m \tag{2.14}$$

Складемо функцію Лагранжа:

$$L(S_i, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} P_i(S_i) + \lambda \cdot \left[\sum_{i=1}^{m} S_i - S_V \right] \tag{2.15}$$

Необхідна умова оптимальності має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(S_i,\lambda)}{\partial S_i} = \dfrac{\partial P_i(S_i)}{\partial S_i} + \lambda = 0, \; i = 1,2,...,m \\ \dfrac{\partial L(S_i,\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{m} S_i - S_V = 0 \end{cases} \qquad (2.16)$$

Звідси можна знайти невідомі витрати сировини S_i і множник Лагранжа λ.

Необхідно відзначити, що для всіх паралельних процесів необхідне виконання умови:

$$\frac{\partial P_1(S_1)}{\partial S_1} = \frac{\partial P_2(S_2)}{\partial S_2} = ... = \frac{\partial P_m(S_m)}{\partial S_m}, \qquad (2.17)$$

що випливає із системи рівнянь (2.15).

Ця умова виражає загальну закономірність задач розподілу ресурсів. З неї витікає, що малі зміни витрат при переробці сировини на всіх етапах виробничого процесу ведуть до однакових змін продуктивності.

Приклад 2.3. Задача оптимального розподілу навантаження для системи очистки стічних вод

Змістовна постановка.

Дана система будівель для біологічної очистки стічних вод. У її склад входять n відстійників для видалення компонентів забруднень з питомою вагою більшою, ніж у води. Тяжкі частинки осідають на дно і за допомогою насосів відкачуються. Очищена рідина подається у спільний колектор і відправляється або на зберігання, або на злив. Технологічна схема має вигляд, показаний на рис. 2.3.

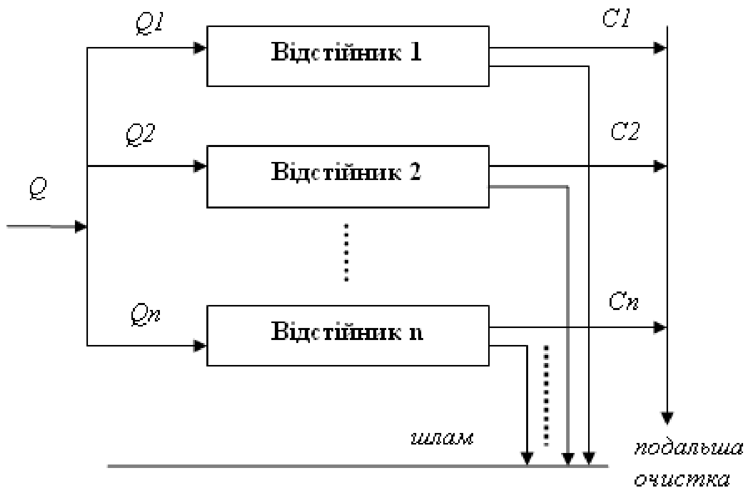

Рис. 2.3. *Система очистки стічних вод*

Математична постановка задачі.

Задача розподілу навантаження у загальному вигляді може бути записана у наступній формі:

$$I = \sum_{i=1}^{n} y_i \to \min_{u_i} \qquad (2.18)$$

$$y_i = f_i\left(u_i, \overline{A_i}\right) \qquad (2.19)$$

$$u_i^{\min} \le u_i \le u_i^{\max} \qquad (2.20)$$

де u_i – керування, y_i – вихід об’єкту, $\overline{A_i}$ – вектор коефіцієнтів рівняння об’єкту.

Нехай на виході маємо концентрації c_i завислих часток, тоді сумарна кількість забруднень рівна $c_i \cdot Q_i$. Критерій оптимальності можна сформулювати в наступному вигляді:

$$I = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot Q_i \to \min_{Q_i} \qquad (2.21)$$

Загальне навантаження задане

$$Q_{зад} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \qquad (*)$$

Кожний відстійник може отримувати навантаження в наступних межах:

$$Q_i^{\min} \le Q_i \le Q_i^{\max}$$

Математична модель об’єкту керування матиме вигляд: $c_i = \alpha_i Q_i$, де α_i – коефіцієнт, що характеризує роботу відстійника.

Перетворення задачі.

Підставимо c_i з рівняння об’єкту в критерій оптимізації:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot Q_i^2 \to \min_{Q_i}$$

Позначимо: $x_i = \dfrac{Q_i}{Q_{зад}}$

Тоді обмеження типу рівняння (*) матиме вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \qquad 0 \le x_i \le 1 .$$

Розв’язок задачі оптимального розподілу навантаження

При відсутності обмежень типу нерівності задача може бути розв’язана методом множників Лагранжа. Але наявність обмежень типу нерівності потребує введення алгоритму для їх урахування.

Алгоритм рішення задачі може мати наступний вигляд [1]. На першому етапі розв’язку задачі обмеження типу нерівностей не враховуються. Тоді дана задача може бути розв’язана шляхом застосування методу множників Лагранжа (або методом штрафних функцій, але з урахуванням лише обмеження типу рівність).

Коли ця підзадача вирішена, перевіряють виконання обмежень. Якщо вони не порушені, то розв’язок знайдено. В протилежному випадку:

1. Підрахуємо сумарне перевантаження: $\Delta_{перев} = \sum_j \left(u_j^{опт} - u_j^{\max} \right)$, де *j=1,2,3...* – перенавантажені агрегати.
2. Визначимо сумарне недовантаження: $\Delta_{недов} = \sum_j \left(u_j^{\min} - u_j^{опт} \right)$, де *j=1,2,3...* – недовантажені агрегати.
3. Аналіз ситуації.
   - Якщо перенавантаження рівне недовантаженню, то всім недовантаженим агрегатам призначаємо мінімальне навантаження, усім перенавантаженим – максимальне.
   - Якщо $\Delta_{перев} < \Delta_{недов}$, то оптимальні навантаження недовантажених агрегатів треба прийняти мінімально допустимими, а решту навантаження розподілити між іншими агрегатами.
   - Якщо $\Delta_{перев} > \Delta_{недов}$, то оптимальні навантаження перенавантажених агрегатів треба прийняти максимально можливими, а решту навантаження розподілити між іншими агрегатами.

4. В першому випадку задача вважається розв'язаною, в другому і третьому – здійснюється перехід до кроку 1 з меншим сумарним навантаженням і меншим числом агрегатів.

Приклад 2.4. Оптимальний розподіл навантаження

Маємо три агрегати, залежності продуктивності яких від навантажень описуються функціями

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(u_1) = \sqrt{u_1}; \\ y_2 &= f_2(u_2) = 2\sqrt{u_2}; \\ y_3 &= f_3(u_3) = 3\sqrt{u_3}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Задача розподілу навантаження між цими агрегатами має вигляд:

$$I = \sum_{i=1}^{n} y_i \to \max_{u_i}, \tag{2.23}$$

при цьому обмеження на значення вхідних величин наступні:

$$1 \le u_1 \le 3; \tag{2.24}$$

$$1 \le u_2 \le 3,5; \tag{2.25}$$

$$3 \le u_3 \le 5; \tag{2.26}$$

$$\sum_{i=1}^{3} u_i = 10. \tag{2.27}$$

Скористаємось алгоритмом призначення граничних навантажень, описаним вище.

Спочатку розв'яжемо задачу оптимізації (2.23) з урахуванням лише обмеження (2.27) за допомогою методу множників Лагранжа. Функція Лагранжа має наступний вигляд:

$$L(\vec{u},\lambda) = \sqrt{u_1} + 2\sqrt{u_2} + 3\sqrt{u_3} + \lambda(u_1 + u_2 + u_3 - 10).$$

Складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{u_1}} + \lambda = 0; \\ \dfrac{1}{\sqrt{u_2}} + \lambda = 0; \\ \dfrac{3}{2\sqrt{u_3}} + \lambda = 0; \\ u_1 + u_2 + u_3 = 10. \end{cases} \tag{2.28}$$

Маємо наступні співвідношення

$$u_1 = \frac{1}{4\lambda^2}; \qquad u_2 = \frac{1}{\lambda^2}; \qquad u_3 = \frac{9}{4\lambda^2}, \tag{2.29}$$

підставивши які у останнє рівняння системи (2.28) отримуємо:

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 10;$$

або

$$\lambda^2 = \frac{14}{40}. \tag{2.30}$$

Підставимо (2.30) у (2.29) і отримаємо рішення задачі (2.23) з обмеженням (2.27):

$$u_1 = \frac{10}{14}; \qquad u_2 = \frac{40}{14}; \qquad u_3 = \frac{90}{14}; \tag{2.31}$$

Отримане рішення не задовольняє умовам (2.24) і (2.26). Обчислимо сумарне перевантаження і недовантаження

$$\Delta_{перев} = \frac{90}{14} - 5 = \frac{20}{14}; \qquad \Delta_{недов} = 1 - \frac{10}{14} = \frac{4}{14}.$$

Оскільки $\Delta_{перев} > \Delta_{недов}$, призначаємо максимальне навантаження перевантаженому агрегату, а решту розподіляємо між першим і другим агрегатами:

$$u_3 = 5$$

$$\sum_{i=1}^{3} u_i - u_3 = 10 - u_3 = 10 - 5 = 5$$

Тепер розв'язуємо задачу розподілу навантаження між двома агрегатами. Система рівнянь для методу множників Лагранжа матиме вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{u_1}} + \lambda = 0; \\ \dfrac{1}{\sqrt{u_2}} + \lambda = 0; \\ u_1 + u_2 = 5. \end{cases} \tag{2.32}$$

Розв'язуємо систему (2.32) аналогічно до системи (2.28) і отримуємо наступне рішення:

$$u_1 = 1; \qquad u_2 = 4. \tag{2.33}$$

Отримане значення u_2 не задовольняє умові (2.25), тобто маємо перевантаження

$$\Delta_{перев} = 4 - 3{,}5 = 0{,}5; \qquad \Delta_{недов} = 0.$$

Залишкове навантаження призначається єдиному агрегату, що залишається, тобто першому:

$$u_1 = 5 - 3{,}5 = 1{,}5,$$

при цьому обмеження (2.24) не порушується. Таким чином маємо остаточне рішення

$$u_1 = 1{,}5; \qquad u_2 = 3{,}5; \qquad u_3 = 5. \tag{2.34}$$

2.3. Умови Куна-Такера

Задачу умовної оптимізації при наявності обмежень типу рівнянь і нерівностей також можна звести до задачі безумовної оптимізації і застосувати для її розв'язку методи класичного аналізу.

Припустимо, що задача оптимізації сформульована в наступний спосіб. Мінімізувати $f_0(\vec{u})$, при:

$$\begin{aligned} &f_j(\vec{u}) = 0,\ j = 1,2,...,m_1 \\ &G_j(\vec{u}) \geq 0,\ j = 1,2,...,m_2 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Припустимо, що цільова функція $f_0(\vec{u})$ і допустима область незалежних змінних D_u опуклі. Функції $f_0(\vec{u})$, $f_j(\vec{u})$, $G_j(\vec{u})$ диференційовані на множині $D_u = E_m$, де E_m - евклідів простір.

У цьому випадку умови оптимальності задачі оптимізації (2.35) визначаються наступною теоремою.

Теорема. Для того щоб точка $\vec{u}^{опт} \in D_u$ була оптимальним розв'язком задачі опуклого програмування (2.35) необхідно і достатньо мати в наявності такі вектори $\vec{\lambda}$ і $\vec{\mu}$ функції Лагранжа:

$$L(\vec{u},\vec{\lambda},\vec{\mu}) = f_0(\vec{u}) - \sum_{j=1}^{m_1}\lambda_j f_j(\vec{u}) - \sum_{j=1}^{m_2}\mu_j G_j(\vec{u}) \tag{2.36}$$

які задовольняють наступним умовам:

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = 0,\ i = 1,2,...,m \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0,\ j = 1,2,...,m_1; \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_j} \le 0,\ j = 1,2,...,m_2; \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_j}\cdot \mu_j = 0; \tag{2.40}$$

$$\mu_j \ge 0. \tag{2.41}$$

Розв'язок задач оптимізації із застосуванням умов в аналітичному вигляді можливий лише для досить простих функцій, тому найчастіше доводиться звертатися до чисельних методів розв'язку.

Приклад 2.5. Умови Куна-Такера

Необхідно вирішити наступну задачу оптимізації:

$$f_0(\vec{u}) = (2-u_1)^2 + (u_2-3)^2 \to \min_{\vec{u}}, \tag{2.42}$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} 3u_1 + 2u_2 - 7 \le 0; \\ -u_1 + u_2 - 1 \le 0. \end{cases} \tag{2.43}$$

Функція Лагранжа матиме вигляд:

$$L = (2-u_1)^2 + (u_2-3)^2 - \mu_1(3u_1 + 2u_2 - 7) - \mu_2(-u_1 + u_2 - 1), \tag{2.44}$$

Як умови оптимальності, відповідно до теореми, отримують:

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -2(2-u_1) + 3\mu_1 - \mu_2 = 0; \tag{2.45}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = 2(u_2-3) + 2\mu_1 + \mu_2 = 0; \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_1} = 3u_1 + 2u_2 - 7 \le 0; \tag{2.47}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_2} = -u_1 + u_2 - 1 \le 0; \tag{2.48}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_1}\mu_1 = \mu_1(3u_1 + 2u_2 - 7) = 0; \tag{2.49}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_2}\mu_2 = \mu_2(-u_1 + u_2 - 1) = 0. \tag{2.50}$$

Ця система з урахуванням умов $\mu_{1,}\ \mu_2 \le 0,$ вирішується важко. Якщо оптимальний розв'язок знаходиться на краю допустимої області (що в загальному випадку невідомий), можна застосувати наступний евристичний метод:

1) Припустимо, що:

$$\mu_{1,}\ \mu_2 > 0. \tag{2.51}$$

2) Відповідно до цього з останніх умов виходить:

$$\begin{cases} 3u_1 + 2u_2 - 7 = 0; \\ -u_1 + u_2 - 1 = 0. \end{cases} \tag{2.52}$$

Звідси:

$$u_1 = 1;\ u_2 = 2. \qquad (2.53)$$

3) Отриманий розв'язок вводимо в рівняння (2.45) і (2.46):

$$-2(2-1) + 3\mu_1 - \mu_2 = 0; \qquad (2.54)$$

$$2(2-3) + 2\mu_1 + \mu_2 = 0, \qquad (2.55)$$

і визначаємо множники Лагранжа:

$$\mu_1 = \frac{4}{5},\ \mu_2 = \frac{2}{5}. \qquad (2.56)$$

4) При цьому $u_1 = 1,\ u_2 = 2.$ є оптимальним розв'язком.

Якщо за допомогою описаного алгоритму неможливо знайти розв'язок, то нерівності розв'язуються чисельними методами.

Розглянемо основну задачу опуклого програмування, коли допустима множина D_u має вигляд:

$$D_u = \left\{ u : \vec{G}(\vec{u}) \geq 0, \vec{u} \geq 0 \right\}. \qquad (2.57)$$

Тоді умови можна сформулювати за допомогою наступної теореми.

Теорема. Якщо функції $f_0(\vec{u})$ й $\vec{G}(\vec{u})$ основної задачі опуклого програмування

$$f_0(\vec{u}) \to \min_{\vec{u} \in D_u}, \qquad (2.58)$$

безперервно диференційовані на множині $\Gamma_u = \left\{ \vec{u} : \vec{u} \geq 0 \right\}$, то для того щоб пара $\vec{u}^*, \vec{\mu}^*$ була сідловою точкою функції Лагранжа $L(\vec{u}, \vec{\mu}) = f_0(\vec{u}) + \left\langle \vec{\mu}, \vec{G}(\vec{u}) \right\rangle$ в області $\vec{u} \geq 0, \vec{\mu} \geq 0$, необхідно і достатньо виконання умов

$$\frac{\partial L^*}{\partial \vec{u}} \geq 0; \qquad (2.59)$$

$$\left\langle \vec{u}^*, \frac{\partial L^*}{\partial \vec{u}} \right\rangle = 0; \qquad (2.60)$$

$$\vec{u}^* \geq 0; \qquad (2.61)$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \vec{\mu}} \leq 0; \qquad (2.62)$$

$$\left\langle \vec{\mu}^*, \frac{\partial L^*}{\partial \vec{\mu}^*} \right\rangle = 0 \qquad (2.63)$$

$$\overline{\mu}^* \geq 0, \qquad (2.64)$$

де:

$$\frac{\partial L^*}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial L(\vec{u}, \vec{\mu})}{\partial \vec{u}} \Big|_{\substack{\vec{u}=\vec{u}^* \\ \vec{\mu}=\vec{\mu}^*}};\ \frac{\partial L^*}{\partial \vec{\mu}} = \frac{\partial L(\vec{u}, \vec{\mu})}{\partial \vec{\mu}} \Big|_{\substack{\vec{u}=\vec{u}^* \\ \vec{\mu}=\vec{\mu}^*}}. \qquad (2.65)$$

Якщо в розглянутій задачі $\Gamma_u = E_m$, то замість перших трьох співвідношень вводиться умова $\dfrac{\partial L^*}{\partial \vec{u}} = 0$ і ми приходимо до умов аналогічних тим, які записані для задачі (2.35).

2.4. Контрольні завдання

1. Знайдіть найкоротшу відстань від точки (1, 0) до параболи $y^2 = 4x$:

а) шляхом вилучення змінної у;

б) за допомогою методу множників Лагранжа.

Поясніть, чому процедура (б), на відміну від процедури (а) приводить до отримання розв'язку задачі.

2. Дана наступна задача. Мінімізувати

$$f(\vec{x}) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 + 4)^2 + e^{5x_3}$$

при обмеженнях

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 1,$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

а) запишіть умови Куна-Такера для цієї задачі.

б) покажіть, що $\vec{x} = (1,0,0)$ є точкою оптимуму.

3. Дана наступна задача. Мінімізувати

$$f(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

при обмеженнях

$$(x_1 - 1)^3 - x_2^2 = 0.$$

а) покажіть графічно, що оптимальне рішення має місце при $x_1 = 1,\ x_2 = 0.$

б) застосуйте метод множників Лагранжа для рішення даної задачі. Поясніть, чому цей метод не приводить до успіху.

4. Покажіть, що функція $f(x, y) = x^2 + y^2$ при обмеженнях $x - y = 5$ досягає мінімуму при $x = 2,5,\ y = -2,5$.

5. Відкрита коробка, що виготовляється з тонкого листа заліза, має висоту z і прямокутну основу з розмірами x і y. Основи і сторони довжиною x мають товщину d (мала величина), а сторони довжиною y мають товщину 2d. Якщо кількість матеріалу фіксована, покажіть, що об'єм коробки максимальний при x=2y=4z.

6. Запишіть умови Куна-Такера і таким чином розв'яжіть задачу:
Мінімізувати функцію

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

при обмеженнях

$$x \ge 0, y \ge 0, x + y \ge 5.$$

7. Оптимізувати розподілення навантаження між трьома енергоблоками; сумарне навантаження $N_\Sigma = 850$ МВт, а залежності витрати палива від навантаження кожного окремого енергоблоку визначаються формулами:

$$B_1(N_1) = \alpha N_1^2; \qquad B_2(N_2) = 1,1\alpha N_2^2 \qquad B_3(N_3) = 1,2\alpha N_3^2,$$

де α – сталий коефіцієнт.

8. Задача умовної оптимізації має вигляд:

$$I(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2 \to \min_{u_1, u_2}$$

$$u_1 + u_2 = 4.$$

Записати необхідні умови оптимальності з використанням методу множників Лагранжа і обчислити оптимальне значення множника Лагранжа $\lambda_{опт}$.

9. Задача умовної оптимізації має вигляд:

$$I(u_1, u_2) = (u_1 - 2)^2 + u_2^2 \to \min_{u_1, u_2}$$

$$u_1 - u_2 = 2.$$

Записати необхідні умови оптимальності з використанням методу множників Лагранжа і обчислити оптимальне значення множника Лагранжа $\lambda_{опт}$.